МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования   
**«Национальный исследовательский**   
**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**Кафедра: высокопроизводительных вычислений и системного**

**программирования**

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа: «Вычислительные методы и суперкомпьютерные технологии»

**ОТЧЕТ**

по третьей лабораторной работе

на тему:

**«**Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений**»**

**Выполнил:** студент

группы 3824М1ПМвм

Ивлев А.Д.

Нижний Новгород  
 2024

**Оглавление**

[1. Введение и постановка задачи 3](#_Toc197028154)

[2. Численные методы решения ОДУ 4](#_Toc197028155)

[2.1 Метод Эйлера 4](#_Toc197028156)

[2.2 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка 4](#_Toc197028157)

[3. Результаты экспериментов 6](#_Toc197028158)

[3.1 Реализация метода Эйлера и метода Рунге-Кутта 4-го порядка 6](#_Toc197028159)

[3.2 Локальная погрешности методов на примерах 1–3 6](#_Toc197028160)

[3.2 Локальная погрешности методов на примере хаотического аттрактора 8](#_Toc197028161)

[4. Заключение 10](#_Toc197028162)

## Введение и постановка задачи

В данной работе будет исследоваться численное решение задачи Коши, которое задаётся системой ОДУ 1-го порядка и начальными условиями :

*(1)*

Для этого будут рассмотрены и реализованы метод Эйлера и метод Рунге-Кутта 4-го порядка. Будет проведено сравнение точности и сложности вычислений данных методов.

Проверка работоспособности и сравнение методов будет проводиться на 4 примерах:

Для данного примера известно аналитическое решение . И система имеет единственное устойчивое состояние равновесия .

Для данного примера известно аналитическое решение . И система имеет единственное неустойчивое состояние равновесия .

Сначала, с помощью замены приведём ОДУ 2-го порядка к системе ОДУ 1-го порядка разрешенных относительно производной.

Тогда , а преобразование задаётся оператором:

Для данного примера известно аналитическое решение . Характеристическое уравнение системы: . То есть – чисто мнимые и состояние равновесия типа центр.

1. Хаотический аттрактор Рёсслера

, где ,

Для данного примера неизвестно аналитическое решение. Данная система нелинейна, определение состояния равновесия и его устойчивость требуют дополнительных исследований.

В рамках данной работы необходимо:

* Реализовать метод Эйлера и метод Рунге-Кутта 4-го порядка
* Для примеров 1–3 построить зависимость погрешности методов от времени при шагах методов .
* Для примера 4 построить траектории в плоскостях {x, y}, {x, z}. Также построить зависимость погрешности методов для каждой координаты от времени при шагах методов .

## Численные методы решения ОДУ

В данной работе будут рассмотрены два итерационных численный метода для приближенного вычисления решения задачи Коши заданной системой ОДУ 1-го порядка, которое можно описать формулами (1): метод Эйлера и метод Рунге-Кутта 4-го порядка (РК4).

Оба метода вычисляют значения на отрезке интегрирования [] с шагом h, используя только значение предыдущего шага, то есть являются одношаговыми. Погрешность методов можно разделить на два вида локальную и глобальную:

Глобальная погрешность – погрешность на всём отрезке интегрирования: , где – приближённо вычисленное решение.

Локальная погрешность – погрешность на итерации: , где – приближённо вычисленное решение, –номер итерации.

### 2.1 Метод Эйлера

**Условия применимости:**

* Функция должна быть непрерывной и дифференцируемой до 2 порядка в области определения. Иначе могут не выполняться оценки погрешности.

**Алгоритм**

* **Инициализация**:
  + Задать отрезок интегрирования [], начальное значение и шаг метода
* **Итерационный процесс**:
* **Критерий остановки**:
  + Достижение конца отрезка интегрирования

**Плюсы:**

* Низкие вычислительные затраты
* Простота реализации

**Минусы:**

* Низкая точность: локальная погрешность , глобальная

### 2.2 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

**Условия применимости:**

* Функция должна быть непрерывной и дифференцируемой до 5 порядка в области определения. Иначе могут не выполняться оценки погрешности.

**Алгоритм**

* **Инициализация**:
  + Задать отрезок интегрирования [], начальное значение и шаг метода
* **Итерационный процесс**:
  + Вычислить коэффициенты:
* **Критерий остановки**:
  + Достижение конца отрезка интегрирования

**Плюсы:**

* Высокая точность: локальная погрешность , глобальная

**Минусы:**

* Большие вычислительные затраты (4 вычисления на шаг)

## Результаты экспериментов

Программная реализация выполнялась на языке python. Полный код доступен по ссылке: <https://github.com/Faert/NLD_Lab>.

Далее точность решения будет оцениваться по локальной погрешности методов. Но поскольку для примера 4 не известно точное решение, то будет подсчитана верхняя оценка погрешности в виде , где – приближенное решение на i-ом шаге вычисленное с шагом , а – приближенное решение в той же точке вычисленное с шагом

### 3.1 Реализация метода Эйлера и метода Рунге-Кутта 4-го порядка

**Метод Эйлера:**

0 | def Euler(func, x0, t0, T, h, history, func\_error = None):

1 |     xs = x0

2 |     while t0 < T:

3 |         x1=x0+h\*func(x0)

4 |         t0+=h

5 |         if(func\_error!=None):

6 |             history.append([t0, x1, func\_error(t0, xs, x1)])

7 |         else:

8 |             history.append([t0, x1])

9 |         x0 = x1

10|     return x0

**Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:**

0 | def RK4(func, x0, t0, T, h, history, func\_error = None):

1 |     xs = x0

2 |     while t0 < T:

3 |         k1=func(x0)

4 |         k2=func(x0+h/2\*k1)

5 |         k3=func(x0+h/2\*k2)

6 |         k4=func(x0+h\*k3)

7 |         x1=x0+h/6\*(k1+2\*k2+2\*k3+k4)

8 |         t0+=h

9 |         if(func\_error!=None):

10|             history.append([t0, x1, func\_error(t0, xs, x1)])

11|         else:

12|             history.append([t0, x1])

13|         x0 = x1

14|     return x0

Где func – функция , x0 – значение , t0 и T границы отрезка интегрирования, h – шаг итерационного метода, history – ссылка на список, где храниться история вычислений, func\_error – функция подсчета локальной погрешности.

### 3.2 Локальная погрешности методов на примерах 1–3

Так как для данных примеров нам известно точное решение, то мы можем вычислить локальную погрешность: , где – приближённо вычисленное решение, –номер итерации. На графиках же будет изображён десятичный логарифм данной погрешности для более детального исследования.

Для первого примера (Рисунок 1) наблюдается ожидаемое поведение состояние системы стримится к асимптотически устойчивому состоянию . И локальная погрешность стримиться к 0. Для метода РК4 при наблюдаются небольшие пики падения погрешности, возможно это связано с тем, что , что близко к машинной точности вычислений. Также наблюдается ожидаемое поведение погрешности: при уменьшении шага в 10 раз локальная погрешность метода Эйлера уменьшается примерно на порядок, а погрешность метода Рунге-Кутта на 4, что соответствует оценкам.

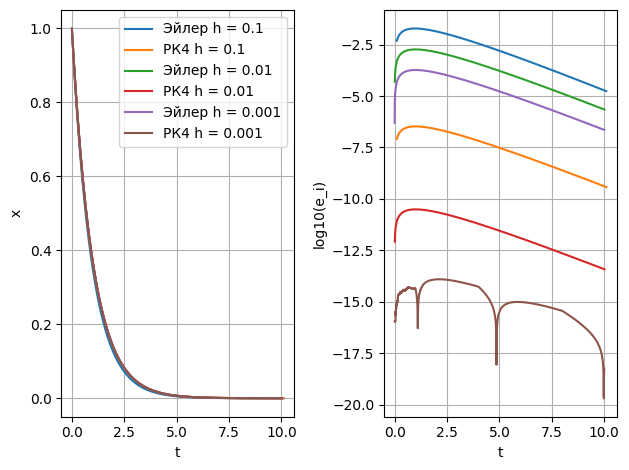


Рисунок 1. Приближенное решение и локальная погрешность e от параметра для первого примера при .

Для второго примера (Рисунок 2) также наблюдается ожидаемое поведение состояние системы уходит от неустойчивого состояния . И погрешность увеличивается со временем.

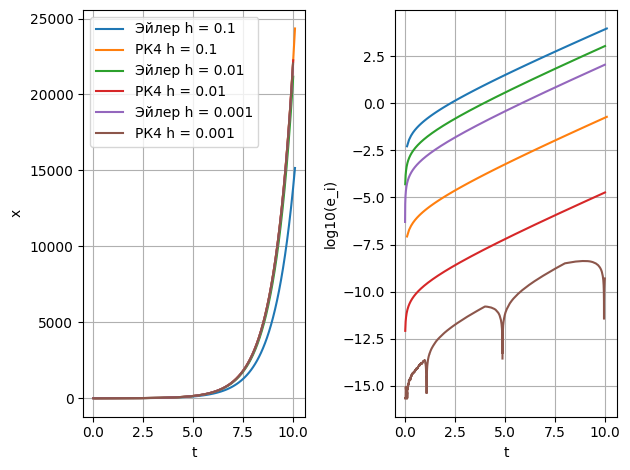
**

Рисунок 2. Приближенное решение и локальная погрешность e от параметра для второго примера при

Для третьего примера (Рисунок 3) ожидаемое поведение цикл с центром в 0. Что подтверждается графиками, но из-за растущей погрешностей состояние со временем удаляется от истинной траектории. Так же выявлена периодичность с частотой в поведении локальной погрешности, что на графике отображено фиолетовыми линиями.

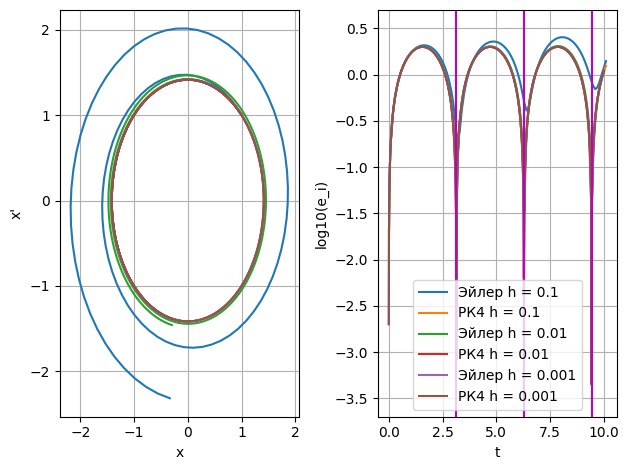


Рисунок 3. Приближенное решение в плоскости и локальная погрешность e от параметра для третьего примера при

Поведение графиков соответствует теоретическим выкладкам. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка показывает лучшую точность, чем метод Эйлера при больших затратах на вычисления.

### 3.2 Локальная погрешности методов на примере хаотического аттрактора

Сначала рассмотрим, как изменяется состояние системы с течением времени. Для более точных вычислений был выбран метод Рунге-Кутта с шагом .

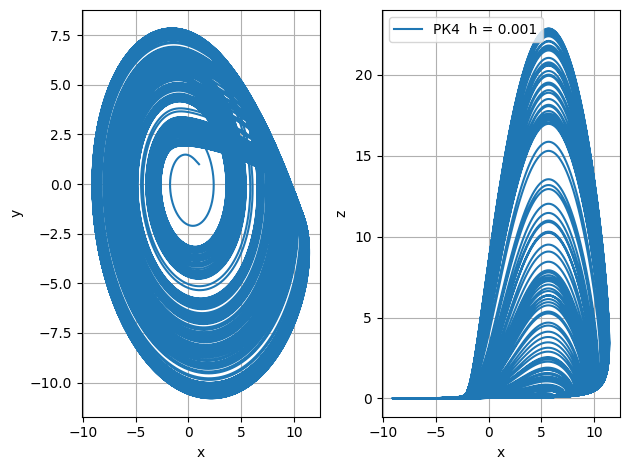
****

Рисунок 4. Поведения решение системы хаотического аттрактора Рёсслера в плоскости , при на отрезке

Можно заметить, что состояние в плоскости выходит на некоторую кривую, описанную вокруг начала координат. А из графика плоскости можно заметить, что со временем z стремиться колеблется в диапазоне от 0 до 25 причём пик находится в – значению параметра .

Теперь рассмотрим поведение оценок локальной погрешности для каждой координаты.

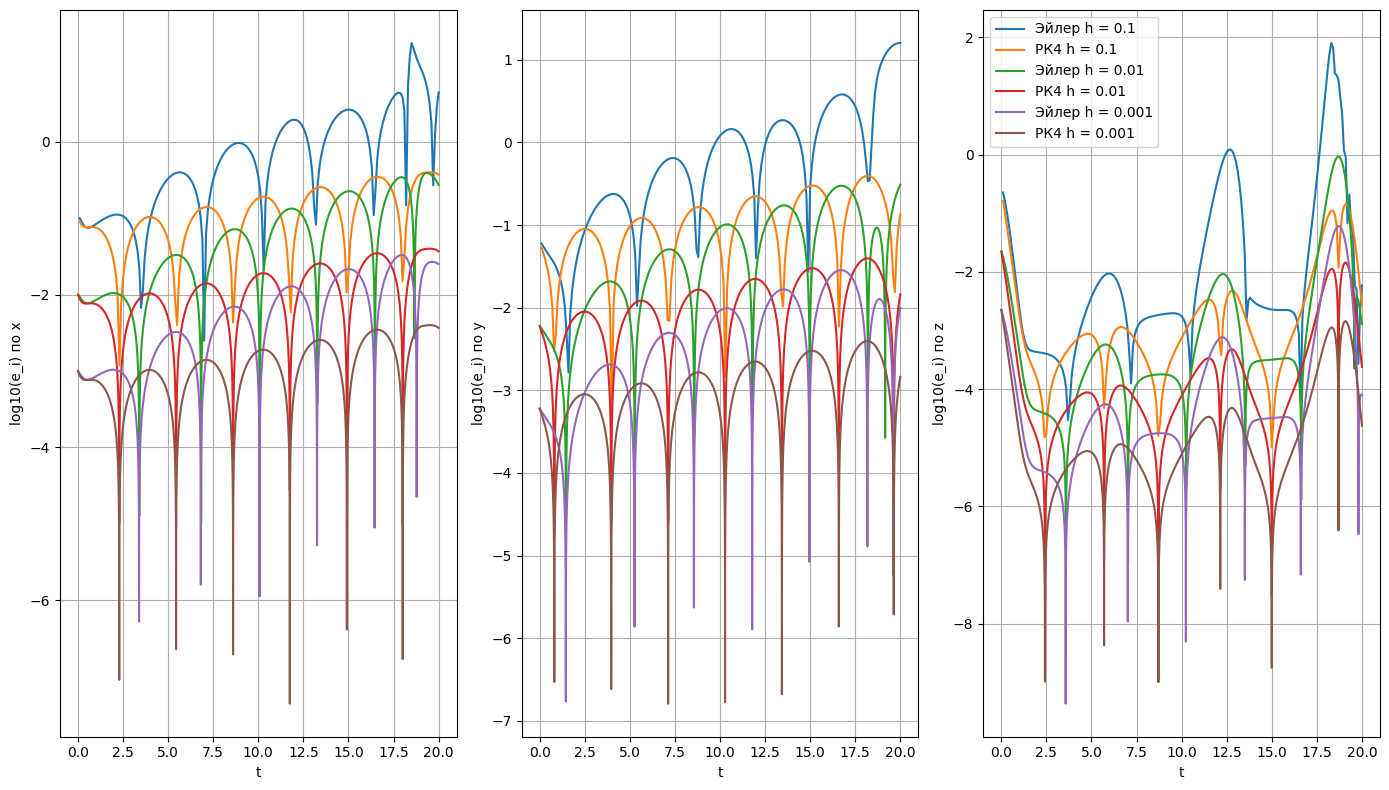


Рисунок 5. Оценки локальной погрешности для координат системы хаотического аттрактора Рёсслера при на отрезке

Из рисунка 5 можно заметить, что оценка локальной погрешности возрастает для всех координат. Также можно заметить некоторую периодичность в её поведении, но период различен для всех методов и выборов их шага.

## Заключение

В данной работе были рассмотрены и реализованы два итерационных численный метода для приближенного вычисления решения задачи Коши (1): метод Эйлера и метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

С их помощью были исследованы 4 различные системы. Теоретический анализ которых был подтверждён результатами экспериментов. Также было показано, что метод Рунге-Кутта 4-го порядка имеет большую точность, взамен на большую трудоёмкость.